上次　正交变换 $\underline{O(n)}$

　　　对称变换 $\underline{A = A^T}$

对称矩阵另一个来源

对称双线性型的 Gram 矩阵.

$V/\mathbb{R}$.　　$\dim V = n$.

$B: V \times V \to \mathbb{R}$　对称双线性型.

取 V 的基 $\underbrace{v_1 \cdots v_n}_{C}$.　Gram 矩阵

$$G_C = \left(B(v_i, v_j) \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}.$$

① $G_C = G_C^T$

② $[v]_C = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.　　$[w]_C = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$v = \sum x_i v_i$.　　$w = \sum y_j v_j$

$$B(v, w) = x^T \cdot G_C \cdot y.$$

(在 $V = \mathbb{R}^n$ 中. 任一对称阵 $A = A^T$.
　　　　　　　　　　　　　　　↕

可定义 $B(x,y)=x^TAy$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的双线性型)

对称..

目标：找基 $v_1\cdots v_n$，使得 G_c "最简洁"?

$v_1\cdots v_n$ 可否在 $B(\ ,\ )$ 下"垂直"

即 $B(v_i,v_j)=0$. $\forall i\neq j$

(能否找到 $v_1\cdots v_n$，使得 G_c 是对角阵)

若存在. $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_2,\cdots v_n) \perp v_1$ "在B下"

希望定义 $W=\{w\in V \mid B(v_1,w)=0\}$.

由B的双线性 $\Rightarrow$ W是子空间.

希望 $\mathrm{span}\,v_1 \oplus W = V$.

需要 ① $\mathrm{span}\,v_1 \cap W=\{0\}$.

$B(v_1,\lambda v_1)=0 \Leftrightarrow \lambda B(v_1,v_1)=0$

$\Leftrightarrow \lambda=0$ 成立.

① $B(v_1, v_1) \neq 0$

② 定义 $F: V \to \mathbb{R}$ 线性映射

$w \mapsto B(v_1, w)$

$W = \ker F$.

假设 ① 成立，$F(v_1) \neq 0$.

$\operatorname{Im} F = \mathbb{R}$，$\dim W = \dim V - \dim \operatorname{Im} F$

$= n - 1$

引理：$B(v, v') = 0 \quad \forall v, v' \in V$ 成立

$\iff B(v, v) = 0. \quad \forall v \in V$ 成立

证明：（二次型 $q: V \to \mathbb{R}$，$q(v) = B(v, v)$，q 与 B 互相决定）

$2B(v, v') = B(v+v', v+v') - B(v, v) - B(v', v')$

$B(v, v') = \frac{1}{2}\left(q(v+v') - q(v) - q(v')\right)$

$2 \neq 0$ （对于 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）

定理：V存在B下正交的基 $v_1 \cdots v_n$.（$B(v_i, v_j)=0$ $(i\neq j)$）

证明：归纳法：$n=1$. ✓ （对$\mathbb{K}$中，$2\neq 0$. 则定理仍成立）

假设对 $n-1$ 成立.

对 n. Case 1. $B(v,v)=0$, $\forall v\in V$.

任意基在B下正交

Case 2. 存在 $v\in V$. $B(v,v)\neq 0$.

任取 v_1, $B(v_1, v_1)\neq 0$, $\boxed{v_1\neq 0}$

取 $W=\{w\in V \mid B(v_1, w)=0\}$

① $W\cap \mathrm{span}_{\mathbb{K}} v_1=\{0\}$.

② $\dim W=n-1$

$\Rightarrow W\oplus \mathrm{span}_{\mathbb{R}} v_1 = V$.

$B: W\times W\to \mathbb{R}$. 由归纳假设

知. W存在B下正交的基 $v_2 \cdots v_n$

V的基 $v_1, v_2 \cdots v_n$ 满足在B下正交.

对称 ≠ 反对称， ， $B(v,v) = -B(v,v)$

$\Rightarrow B(v,v) = 0$

($V = (\mathbb{F}_2)^2$， $B(x,y) = x^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y$)

V 没有在 B 下正交的基

在 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$， 还可以取

$$G_C = \begin{pmatrix} B(v_1,v_1) & 0 & 0 \\ 0 & B(v_2,v_2) & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & B(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$

$v_1 \cdots v_n$， 使得 $B(v_i, v_i) = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}$

$\lambda \neq 0$， $B(\lambda v_1, \lambda v_1) = \underline{\lambda^2} (B(v_1, v_1))$

$\lambda^2 > 0$

取 $w_i = \dfrac{v_i}{\sqrt{|B(v_i, v_i)|}}$， 对 $B(v_i, v_i) \neq 0$

$w_i = v_i$， 若 $B(v_i, v_i) = 0$.

$$G_{\{w_1 \cdots w_n\}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

对角线上 1 的个数 $= p$

-1 $= q$

0 $= r$

$$\boxed{p+q+r=n}$$

定义：(p, q, r) 称为 B 的 signature.

符号.

$\boxed{\text{"well-defined"}}$

定义：

- (正定性). $B(v, v) > 0, \ \forall v \neq 0$
- (半正定). $B(v, v) \geq 0, \ \forall v \in V$
- (负定) $B(v, v) < 0. \ \forall v \neq 0$
- (半负定) $B(v, v) \leq 0, \ \forall v \in V.$

性质：若在基 $\{w_1, \ldots, w_n\}$ 下，
C

$p=n \Rightarrow$ 正定
$q=n \Rightarrow$ 负定
$p=0, \Rightarrow$ 半负定
$q=0, \Rightarrow$ 半正定.

Pf: $[v]_C = x$, $[w]_C = y$. G_C

$$B(v,w) = x^T \cdot G_C \cdot y$$

$$= (x_1 \ldots x_n) \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1y_1 + \cdots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} \cdots x_{p+q}y_{p+q}$$

$$B(v,v) = \underline{(x_1)^2 + \cdots + (x_p)^2} - \underline{(x_{p+1})^2 - \cdots - (x_{p+q})^2}.$$

性质：(p, q, r) 由 B 唯一确定（与基的选取无关）

证明: $P = \max\{\dim W \mid W \subset V$ 子空间. $B|_W: W \times W \to \mathbb{R}$ 是正定的$\}$.

Claim: $\underline{P = p}$

证明 claim: ① 取 $W = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{w_1, \cdots w_p\}$

$B|_W$ 正定.

$\Rightarrow P \geq p$.

② 取 $\underline{\dim W > p}$

则 $W \cap \underbrace{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{w_{p+1}, \cdots w_n\}}_{W'} \neq \{0\}$

$$\underbrace{\dim W}_{>p} + \underbrace{\dim W'}_{n-p} = \underbrace{\dim(W+W')}_{\leq n} + \underbrace{\dim(W \cap W')}_{\geq 1}.$$

$B|_{W'}: W' \times W' \to \mathbb{R}$

半负定. $\Rightarrow$ 存在 $v \neq 0$. $v \in W$.

$B(v, v) \leq 0$. $\Rightarrow B|_W$ 不是正定.

② $\Rightarrow$ $P \le p'$.

$P = p$

同理: $Q = \max\{\dim W \mid B|_W : W \times W \to \mathbb{R}$ 负定$\}$

$\Rightarrow Q = q$.

$\Rightarrow (p, q, r)$ 由 B 而确定

Remark: $r \ne \max\{\dim W \mid B|_W = 0\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

取 $v = w_1 + w_2$. $B(v, v) = 0$

$W = \operatorname{span}\{w_1 + w_2, w_3, \dots, w_n\}$

$B|_W = 0$

(作业中，radical 定义了 r)
dim

矩阵观点：$G_C = (B(v_i, v_j))$ $\{v_1 \cdots v_n\} = C$

换基 $\{w_1 \cdots w_n\} = D$.

G_D 与 G_C 的关系 ??

$(v_1 \cdots v_n)$ 是 $(w_1 \cdots w_n)$ 的线性组合.

$P = ([v_1]_D, \cdots [v_n]_D)$ 可逆方阵.

$(v_1 \cdots v_n) = (w_1 \cdots w_n) \cdot P$ $\boxed{(P_{D \leftarrow C})}$

$[v]_C$，$[v]_D$ 关系 $\boxed{[v]_D = P_{D \leftarrow C} \cdot [v]_C}$

$$B(v, w) = ([v]_C)^T \cdot G_C \cdot ([w]_C)$$
$$= ([v]_D)^T \cdot G_D \cdot ([w]_D)$$
$$= (P \cdot [v]_C)^T \cdot G_D \cdot (P \cdot [w]_C)$$

$= (([v]_C)^T (P^T G_D P) \cdot [w]_C$

$G_C = P^T G_D P$

定义：A_1，A_2 对称矩阵，称 A_1，A_2 相合当且仅当存在 P 可逆，$P^T A_1 P = A_2$。

推论：$A \in M_n(\mathbb{R})$，$A = A^T$，

A 相合于 $\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$

也可用 P 分解为初等矩阵来完成

p 个 1，q 个 -1，r 个 0

(p, q, r) 由 A 唯一确定

（二次型的配方）

回顾：A 看作 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 在 $\langle , \rangle$ 下对称变换。

有一组标准正交基 $(v_1, \dots, v_n) = Q$。

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$Q^TQ = I$, $Q^{-1} = Q^T$

$$Q^TAQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{|\lambda_1|}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \cdots 1 \end{bmatrix} Q^TAQ \begin{bmatrix} \sqrt{|\lambda_1|}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \cdots 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & 0 \cdots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

A 特征值中有 p 个 >0, q 个 <0,

r 个 $=0$.

(在 $\mathbb{C}$ 上, "标准型", "分类" 更复杂)

定义: A 正定, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$,

$x^TAx > 0$.

定理: $A=A^T$. A 正定 $\Leftrightarrow$ $A=PP^T$.
P 可逆.

证明: "$\Leftarrow$" $A=P\cdot P^T$.

$$x^TAx=(x^TPP^Tx)$$
$$=(P^Tx)^T\cdot(P^T\cdot x)$$

$y=P^Tx$. P^T 可逆, $x\neq 0 \Rightarrow y\neq 0$

$$=\langle y,y\rangle>0.$$

$\boxed{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$ A 正定. 存在 P 可逆

$$P^TAP=I.$$
$$A=(P^T)^{-1}P^{-1}$$
$$=\underline{(P^T)^{-1}}\cdot\underline{((P^T)^{-1})^T}.$$

半正定. 也有 $A=PP^T$. P 不一定可逆.

证明: "$\Leftarrow$" $x^TAx=(P^Tx)^T(P^Tx)=\langle y,y\rangle\geq 0.$

"$\Rightarrow$"

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = (P^T)^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}}_{\text{拆成 } QQ^T \text{ 的形式}} (P^{-1})$$

$$= \boxed{(P^T)^{-1}} \cdot Q \cdot Q \cdot (P^{-1})$$

$P' = (P^T)^{-1}$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = Q^T$$

$$A = (P' \cdot Q) \cdot Q^T \cdot (P')^T$$

$$= \boxed{(P'Q) \cdot (P' \cdot Q)^T}$$

下次 奇异值分解